МАТЕМАТИКА
КРАТКИЙ СПРАВОЧНИК

Алгебра

Модуль действительного числа

Модулем $|a|$ числа a называется само это число, если оно неотрицательно, и противоположное ему число, если оно отрицательно:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Выделим несколько основных свойств модуля, полезных при решении различных алгебраических и геометрических задач:

- $|a|^2 = a^2$,
- $||a|| = |a|$,
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$,
- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ $(b \neq 0)$,
- $|a + b| \leq |a| + |b|$,
- $|a| - |b| \leq \big||a| - |b|\big|$.

Степени и корни

При извлечении арифметического корня натуральной степени необходимо обращать внимание не только на область допустимых значений выражения (нельзя извлекать корни четной степени из отрицательных чисел), но и на результат:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a, \qquad \sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|, \qquad \sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a.$$

Полезно знать и использовать при преобразовании выражений основные свойства арифметических корней (a и b – неотрицательные числа, n и p – натуральные):

- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$,
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ $(b \neq 0)$,
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$,
- $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[pn]{a}$,
- $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}$,
- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[p]{a} = \sqrt[np]{a^{n+p}}$.

Используя формулу связи между арифметическим корнем и степенью с рациональным показателем для положительного числа c:

$$\sqrt[n]{c^p} = c^{\frac{p}{n}} \ (n \text{ и } p \text{ – натуральные}),$$

можно переходить от вычислений с корнями к более удобным вычислениям со степенями, в которых действия опираются на следующие свойства степеней положительных чисел (p и q – произвольные рациональные числа):

- $c^1 = c$,
- $c^0 = 1$,
- $c^{-p} = \frac{1}{c^p}$,
- $c^p \cdot c^q = c^{p+q}$,
- $\frac{c^p}{c^q} = c^{p-q}$,
- $(c^p)^q = c^{pq}$,
- $(c_1 \cdot c_2)^p = c_1^p \cdot c_2^p$,
- $\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^p = \frac{c_1^p}{c_2^p}$.

Логарифмы

Логарифмом $\log_a b$ положительного числа b по основанию a $(a > 0, a \neq 1)$ называется показатель степени p, в которую нужно возвести a, чтобы получить b: $a^p = b$.

Из определения следует *основное логарифмическое тождество*:

$$a^{\log_a b} = b.$$

Для положительных чисел a, b и c $(a \neq 1)$ имеют место следующие основные свойства логарифмов:

- $\log_a a = 1$,
- $\log_a 1 = 0$,
- $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$,
- $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$,
- $\log_{a^q} b^p = \frac{p}{q} \log_a b$,
- $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$ $(b \neq 1)$,
- $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ $(b \neq 1)$,
- $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ $(b \neq 1)$.

Многочлены

Наиболее известны следующие *формулы сокращенного умножения* (a и b – произвольные выражения, имеющие смысл):

- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ – разность квадратов,
- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ – квадрат суммы (разности),
- $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$ – сумма (разность) кубов,
- $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$ – куб суммы (разности).

Иногда бывает полезно использовать более сложные формулы:

- $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac,$
- $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$

В последней из них нужно обратить внимание на правую скобку: степени a с каждым шагом на единицу уменьшаются, а степени b – увеличиваются.

Для возведения в натуральную степень суммы двух выражений удобно использовать *треугольник Паскаля*: в вершине треугольника – его первой строке – записывают две единицы, каждая следующая строка строится по правилам: а) на левом и правом концах стоят единицы; б) каждое из чисел внутри строки равно сумме двух чисел, стоящих над ним.

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

Для того чтобы раскрыть скобку многочлена вида $(a + b)^n$, берут коэффициенты из -й строки треугольника Паскаля, при этом степени a с каждым шагом на единицу уменьшаются, а степени b – увеличиваются:

- для 2-й степени: 1 2 1 $\quad a^2 + 2ab + b^2$,
- для 3-й степени: 1 3 3 1 $\quad a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$,
- для 4-й степени: 1 4 6 4 1 $\quad a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Квадратный трехчлен, квадратное уравнение

Уравнение второй степени $ax^2 + bx + c = 0$ с действительными коэффициентами a, b и c $(a \neq 0)$ и переменной x называется *квадратным*; его левая часть называется *квадратным трехчленом*.

Число $D = b^2 - 4ac$ называется *дискриминантом квадратного трехчлена* и определяет количество корней квадратного уравнения:

- если $D > 0$, то уравнение имеет два различных корня:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a};$$

- если $D = 0$, то уравнение имеет один корень (два совпадающих):

$$x = \frac{-b}{2a},$$

- если $D < 0$, то уравнение корней не имеет.

Если квадратный трехчлен имеет корни (быть может, совпадающие), то его можно разложить на множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Часто при нахождении корней используют *теорему Виета:* если x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, то их сумма и произведение выражаются через коэффициенты следующим образом:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Системы линейных уравнений (СЛУ)

Системой двух линейных уравнений с двумя неизвестными называют систему вида (a_1, a_2, b_1, b_2 – коэффициенты, c_1 и c_2 – свободные члены, а x и y – переменные):

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Зная коэффициенты и свободные члены системы, можно исследовать ее на наличие решений и их количество:

- система имеет единственное решение, если $a_1b_2 \neq a_2b_1$;
- не имеет решений, если $a_1b_2 = a_2b_1$ и $a_1c_2 \neq a_2c_1$ или $b_1c_2 \neq b_2c_1$;
- имеет бесконечно много решений, если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

При решении СЛУ чаще пользуются следующими методами:

1) *метод подстановки:* выразить из любого уравнения одну переменную через другую; подставить в другое уравнение вместо этой переменной полученное выражение; решить получившееся уравнение; найти соответствующее значение второй переменной;

2) *метод сложения*: умножить уравнения системы, подбирая множители так, чтобы коэффициенты при одной из переменных стали противоположными числами; сложить почленно левые и правые части уравнений системы; решить получившееся уравнение; найти соответствующее значение второй переменной.

Прогрессии

Арифметической прогрессией называется последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, в которой каждый член, начиная со второго, равен сумме предыдущего члена и фиксированного числа d, называемого разностью арифметической прогрессии: $a_{i+1} = a_i + d$.

Для нахождения члена прогрессии используют формулы ($k < n$):

- $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$,
- $a_n = a_k + (n-k) \cdot d$,
- $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$,
- $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-k} + a_{n+k})$.

Сумму первых n членов арифметической прогрессии можно найти по одной из формул:

- $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$,
- $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$.

Геометрической прогрессией называется последовательность чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$, в которой каждый член, начиная со второго, равен произведению предыдущего члена и фиксированного числа q ($q \neq 0$), называемого знаменателем геометрической прогрессии: $b_{i+1} = b_i \cdot q$.

Для нахождения члена прогрессии используют формулы ($k < n$):

- $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$,
- $b_n = b_k \cdot q^{n-k}$,
- $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$,
- $b_n = \sqrt{b_{n-k} \cdot b_{n+k}}$.

Сумму первых n членов геометрической прогрессии можно найти по одной из формул:

- $S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q-1}$,
- $S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1}$.

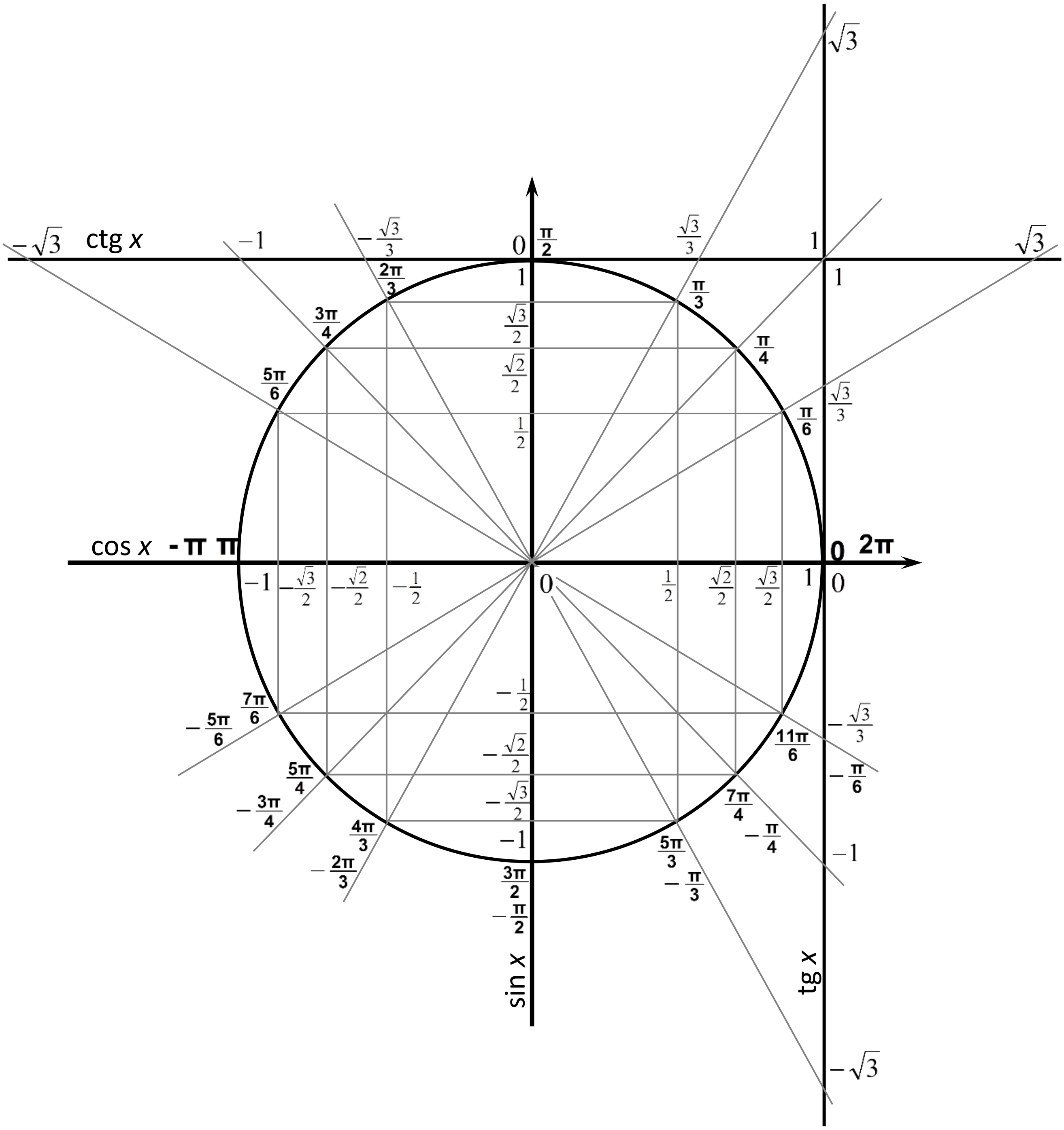
Сумму всех членов *бесконечной геометрической прогрессии* со знаменателем $|q| < 1$ и первым членом b_1 находят по формуле: $S_n = \frac{b_1}{1-q}$.

Тригонометрия

Тригонометрическая окружность

На окружности единичного радиуса, центр которой совпадает с началом координат, нанесены числа – аргументы тригонометрических функций, им в соответствие ставятся проекции на оси Ox ($\cos x$) и Oy ($\sin x$), а также проекции на оси тангенсов и котангенсов, получаемые при центральном проектировании.

Тригонометрическую окружность используют при нахождении значений тригонометрических функций, обратных тригонометрических функций, решении простейших тригонометрических уравнений и неравенств.



Тождества связи функций одного аргумента[1]

При преобразованиях выражений часто употребляют тождества:

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,
- $1 + \mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$,
- $\mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$,
- $\mathrm{tg}\, x + \mathrm{ctg}\, x = \frac{2}{\sin 2x}$,
- $\mathrm{tg}\, x \cdot \mathrm{ctg}\, x = 1$,
- $1 + \mathrm{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$,
- $\mathrm{ctg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$,
- $\mathrm{ctg}\, x - \mathrm{tg}\, x = 2\,\mathrm{ctg}\, 2x$,

[1] Здесь и далее: тождества справедливы на области их допустимых значений: $\sin x$ и $\cos x$ существуют для всех действительных значений аргумента, $\mathrm{tg}\, x$ для $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $\mathrm{ctg}\, x$ для $x \neq \pi n, n \in Z$.

- $\cos^2 x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{1+\operatorname{ctg}^2 x}$,
- $\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$,
- $\cos x \pm \sin x = \sqrt{2}\sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x \mp \frac{\pi}{4}\right)$.

Преобразуя эти формулы, заполним таблицу связи между функциями одного аргумента, в которой знаки перед радикалами согласуются со знаками вычисляемых функций.

Таблица связи между функциями одного аргумента

	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
$\sin x$		$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\pm\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}}$
$\cos x$	$\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$		$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$	$\pm\frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}}$
$\operatorname{tg} x$	$\pm\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$		$\frac{1}{\operatorname{ctg} x}$
$\operatorname{ctg} x$	$\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$	$\pm\frac{\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\frac{1}{\operatorname{tg} x}$	

Формулы сложения аргументов

- $\sin(x \pm y) = \sin x\cos y \pm \cos x \sin y$,
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$,
- $\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$,
- $\operatorname{ctg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y}$.

Формулы кратных аргументов

- $\sin 2x = 2\sin x \cos x$,
- $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$,
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$,
- $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$,
- $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$,
- $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$,
- $\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$,
- $\operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2\operatorname{ctg} x}$,
- $\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$,
- $\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$,
- $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$,
- $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$,
- $\operatorname{tg} 3x = \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1-3\operatorname{tg}^2 x}$,
- $\operatorname{ctg} 3x = \frac{\operatorname{ctg}^3 x - 3\operatorname{ctg} x}{3\operatorname{ctg}^2 x - 1}$,
- $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$,
- $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}$.

Формулы преобразования суммы в произведение

- $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$,
- $\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$,
- $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$,
- $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$,
- $\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cos y}$,
- $\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(y\pm x)}{\sin x\sin y}$.

Формулы преобразования произведения в сумму

- $\sin x\cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$,
- $\sin x\sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$,
- $\cos x\cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$.

Универсальная тригонометрическая подстановка

Часто при рассмотрении тригонометрических уравнений и неравенств бывает удобным сводить их к решению дробно-рациональных уравнений и неравенств с помощью *универсальной тригонометрической подстановки* $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Тогда $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}$.

Введение вспомогательного угла

Для преобразования выражений вида $a\cos x \pm b\sin x$ используют так называемый метод введения вспомогательного угла

$$\varphi = \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

основываясь на формулах:

- $a\cos x \pm b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x\pm\varphi)$,
- $a\sin x \pm b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x\pm\varphi)$.

Основные соотношения для обратных функций

При преобразовании выражений с обратными тригонометрическими функциями бывает полезно использовать формулы ($n \in Z$):

- $\sin(\arcsin a) = a$,
- $\cos(\arccos a) = a$,
- $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a$,
- $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a$,
- $\arcsin(\sin x) = (-1)^n x + \pi n$,
- $\arccos(\cos x) = \pm x + 2\pi n$,
- $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x + \pi n$,
- $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x + \pi n$.

Простейшие тригонометрические уравнения

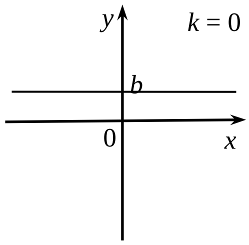
При рассмотрении тригонометрических уравнений тем или иным способом решение сводят к простейшим уравнениям, которые в общем случае решаются по формулам:

- $\sin x = a\ (|a| \le 1)$, $\quad x_1 = \arcsin a + 2\pi n, \mathrm{n} \in \mathrm{Z}$,
  $x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \mathrm{n} \in \mathrm{Z}$,
  $x_{1,2} = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \mathrm{n} \in \mathrm{Z}$,
- $\cos x = a\ (|a| \le 1)$, $\quad x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in Z$,
- $\operatorname{tg} x = a$, $\quad x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in Z$,
- $\operatorname{ctg} x = a$, $\quad x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in Z$.

Начала математического анализа

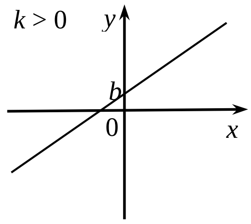
Основные элементарные функции и их графики

Линейная функция

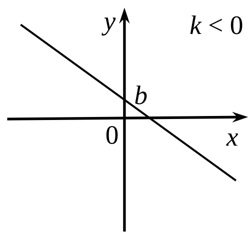


Функция $y = kx + b$, где k и b – некоторые действительные числа, а x – переменная, называется *линейной*.

Область определения линейной функции – все действительные числа, область значений при $k = 0$ состоит из одного числа b, при $k \neq 0$ – все действительные числа. При $k > 0$ функция возрастает, при $k < 0$ – убывает, при $k = 0$ является постоянной. Графиком линейной функции является прямая, для ее построения достаточно двух точек.



По уравнениям линейных функций $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ можно судить о расположении их графиков. Если $k_1 = k_2$, то прямые параллельны; если $k_1k_2 = -1$ – перпендикулярны. Угол φ между прямыми можно найти по формуле: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}$.

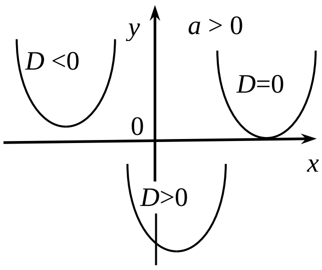


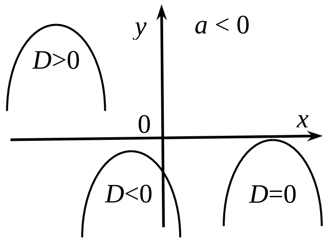
Квадратичная функция

Функция $y = ax^2 + bx + c$, где $a\ (a \neq 0), b$ и c – действительные числа и x – переменная, называется *квадратичной*.

Областью определения квадратичной функции является множество действительных чисел. Графиком квадратичной функции является парабола, ветви которой при $a > 0$ направлены вверх, а при $a < 0$ – вниз. Вершина параболы находится в точке $(x_0;\ y_0)$, где $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$.

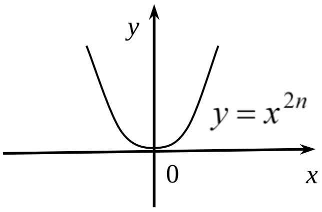
Положение параболы относительно оси Ox зависит от дискриминанта, что показано на рисунке.



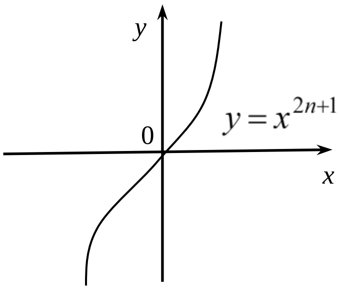


Степенные функции

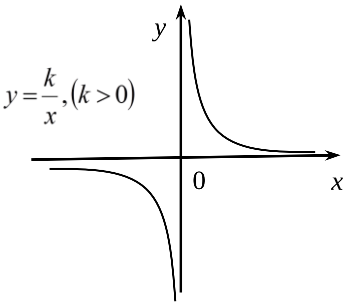
- Функции вида $y = x^{2n}$, $y = x^{2n+1}$, где $n \in N$.

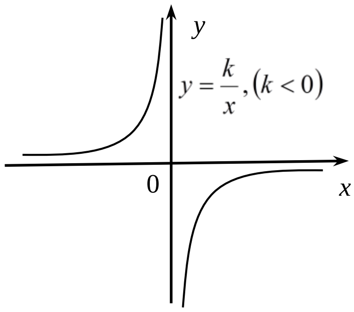


Область определения этих функций – все действительные числа, область значения функции $y = x^{2n}$ – множество всех неотрицательных чисел, $y = x^{2n+1}$ – все действительные числа. Функция $y = x^{2n+1}$ возрастает на всей области определения, а $y = x^{2n}$ на промежутке $(-\infty; 0]$ убывает и на промежутке $[0; +\infty)$ возрастает. Функция $y = x^{2n}$ является четной, ее график симметричен относительно оси Oy, функция $y = x^{2n+1}$ является нечетной, ее график симметричен относительно начала координат.



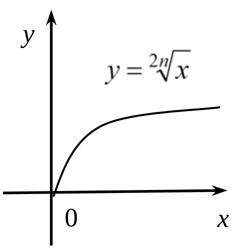
- Функция $y = \frac{k}{x}$.

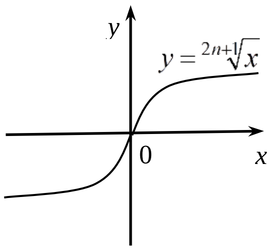




Области определения и значений – все действительные числа, кроме нуля. Функция на каждом из двух промежутков области определения убывает при $k > 0$ и возрастает при $k < 0$. График функции называется гиперболой. Функция нечетная, график симметричен относительно начала координат.

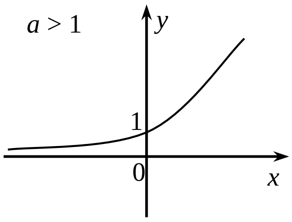
- Функции вида $y = \sqrt[2n]{x}$ и $y = \sqrt[2n+1]{x}$, где $n \in N$.

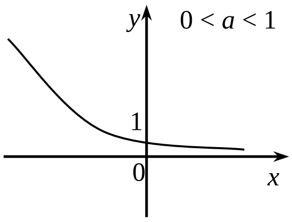




Область определения и область значений функции $y = \sqrt[2n+1]{x}$ – все действительные числа, а функции $y = \sqrt[2n]{x}$ – множество всех неотрицательных чисел. Обе функции возрастают на своей области определения. Функция $y = \sqrt[2n+1]{x}$ является нечетной, ее график симметричен относительно начала координат.

Показательная функция





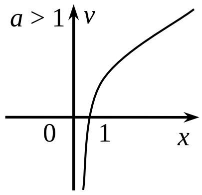
Функция $y = a^x$, где a – положительное число, не равное 1, называется *показательной*.

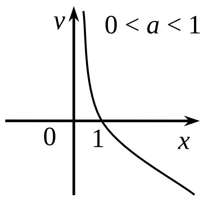
Областью определения показательной функции является множество всех действительных чисел, областью значений – множество всех положительных действительных чисел. Так как $a^0 = 1$, то график показательной функции проходит через точку $(0; 1)$; функция монотонно возрастает при $a > 1$ и монотонно убывает при $0 < a < 1$.

При решении показательных уравнений и неравенств пользуются свойством монотонности показательной функции:

- $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$,
- $a^x > a^y \Leftrightarrow x > y \ (a > 1)$,
- $a^x > a^y \Leftrightarrow x < y \ (0 < a < 1)$.

Логарифмическая функция





Функция $y = \log_a x$, где a – положительное число, не равное 1, называется *логарифмической*.

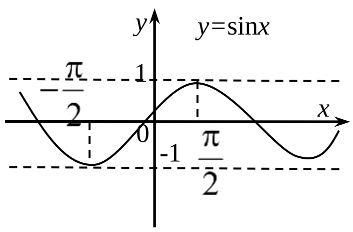
Областью определения логарифмической функции является множество всех положительных действительных чисел, областью значений – множество всех действительных чисел. Так как $\log_a 1 = 0$, то график показательной функции проходит через точку $(1; 0)$; монотонно возрастает при $a > 1$ и монотонно убывает при $0 < a < 1$.

При решении логарифмических уравнений и неравенств пользуются свойством монотонности функции $(x > 0, y > 0)$:

- $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$,
- $\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x > y \ (a > 1)$,
- $\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x < y \ (0 < a < 1)$.

Тригонометрические функции

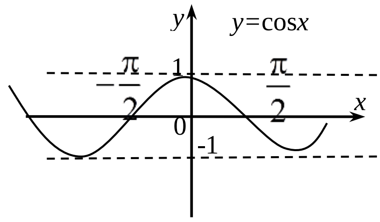
- Функция $y = \sin x$.



Областью определения является множество всех действительных чисел, областью значений – промежуток $[-1; 1]$. Функция возрастает на $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$, убывает на $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$. Функция является нечетной, график симметричен относительно начала координат.

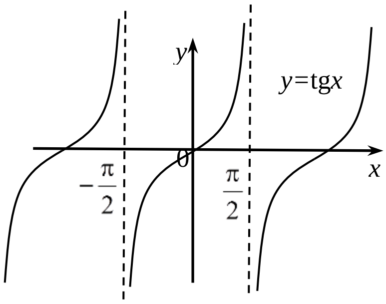
- Функция $y = \cos x$.

Областью определения является множество всех действительных чисел, областью значений – промежуток $[-1; 1]$. Функция возрастает на $[\pi + 2\pi n; 2\pi n]$, $n \in Z$, убывает на $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in Z$. Функция является четной, график симметричен относительно оси Oy.



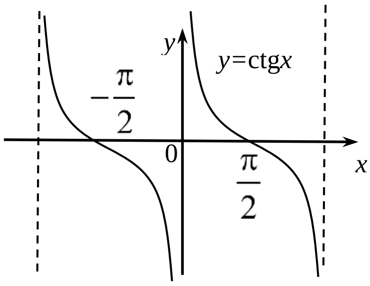
- Функция $y = \text{tg}\, x$.

Областью определения является множество всех действительных чисел, кроме точек вида $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$, областью значений – множество всех действительных чисел. Функция возрастает на каждом промежутке области определения. Функция является нечетной, график симметричен относительно начала координат.



- Функция $y = \text{ctg}\, x$.

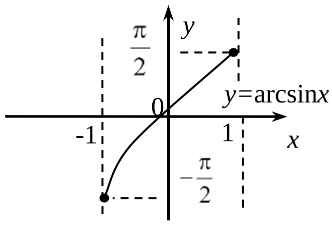
Областью определения является множество всех действительных чисел, кроме точек вида πn, $n \in Z$, областью значений – множество всех действительных чисел. Функция убывает на каждом промежутке области определения. Функция является нечетной, график симметричен относительно начала координат.



Обратные тригонометрические функции

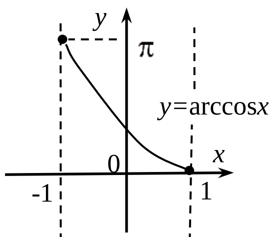
- Функция $y = \arcsin x$.

Область определения – промежуток $[-1; 1]$, область значений – промежуток $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Функция возрастает на всей области определения. Функция является нечетной, график симметричен относительно начала координат.



- Функция $y = \arccos x$.

Область определения – промежуток $[-1; 1]$, область значений – промежуток $[0; \pi]$. Функция убывает на всей области определения.



- Функция $y = \text{arctg}\, x$.

Область определения – множество всех действительных чисел, область значений – промежуток $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Функция возрастает на всей области определения. Функция является нечетной,

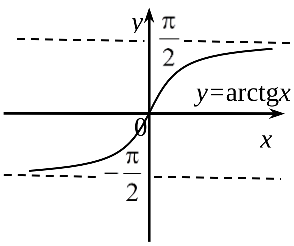
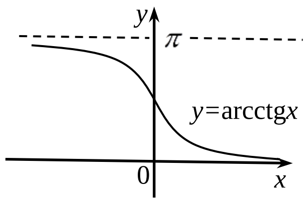


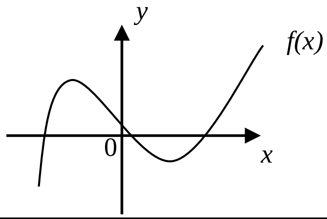
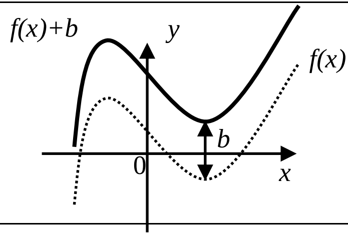
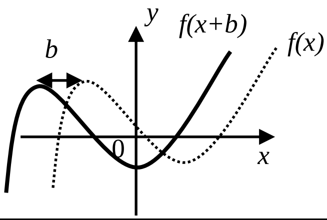
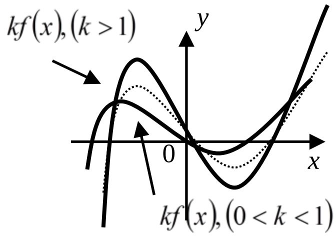
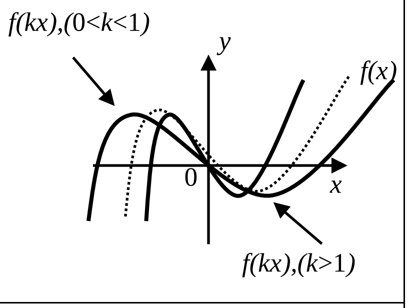
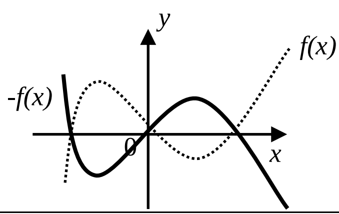
график симметричен относительно начала координат.

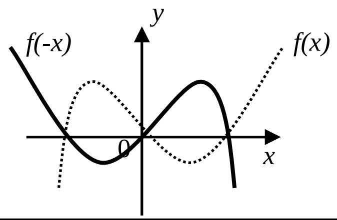
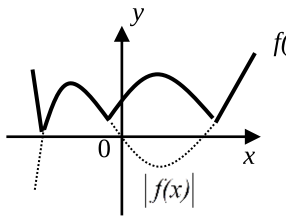
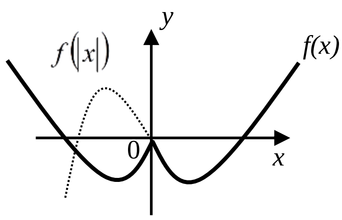
- Функция $y = \operatorname{arcctg} x$.



Область определения – множество всех действительных чисел, область значений – промежуток $(0;\ \pi)$. Функция убывавет на всей области определения.

Основные приемы преобразования графиков

$y = f(x)$	Пусть дан график функции $y = f(x)$	
$y = f(x) + b$	Перенос графика y=$f(x)$ на вектор $\vec{a}\ (0; b)$	
$y = f(x + b)$	Перенос графика $y = f(x)$ на вектор $\vec{a}\ (-b; 0)$	
$y = kf(x)$, $k > 0$	При $k > 1$ растяжение от ки $(0; 0)$ вдоль оси ординат в k раз; при $0 < k < 1$ сжатие к точке $(0; 0)$ вдоль оси ординат в $\frac{1}{k}$ раз	
$y = f(kx)$, $k > 0$	При $k > 1$ сжатие к точке $(0; 0)$ вдоль оси абсцисс в k раз; при $0 < k < 1$ растяжение от точки $(0; 0)$ вдоль оси абсцисс в $\frac{1}{k}$ раз	
$y = -f(x)$	Отображение симметрично относительно оси абсцисс	

$y = f(-x)$	Отображение симметрично относительно оси ординат	
$y = \lvert f(x) \rvert$	Часть графика в верхней полуплоскости и на оси абсцисс без изменения, а вместо части графика в нижней полуплоскости строим симметричную ей относительно оси Ox	
$y = f(\lvert x \rvert)$	Часть графика в правой полуплоскости и на оси ординат без изменения, а вместо части в левой полуплоскости строим симметричную правой относительно оси Oy	

Производная функции

Производной функции $y = f(x)$ *в точке* x_0 называется число $f'(x_0)$ равное $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

Таблица производных основных элементарных функций

Формула	***Ограничения***		***Формула***	***Ограничения***
$(c)' = 0$	$c \in R$		$(\cos x)' = -\sin x$	$x \in R$
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha \in N, x \in R$ или $-\alpha \in N, x \neq 0$, или $\alpha \notin Z, x > 0$		$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$x \in R$		$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq \pi n, n \in Z$
$(e^x)' = e^x$	$x \in R$		$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-1 < x < 1$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$x > 0$		$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-1 < x < 1$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$x > 0$		$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$x \in R$
$(\sin x)' = \cos x$	$x \in R$		$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$	$x \in R$

Правила дифференцирования

Для непрерывных, определенных и дифференцируемых на интервале функций f и g справедливы правила дифференцирования:

- $(C \cdot f)' = C \cdot f'$, где $C \in R$ – константу (постоянный множитель) можно выносить за знак производной;
- $(f + g)' = f' + g'$ – производная суммы равна сумме производных;
- $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ – производная произведения равна сумме произведений производной одной функции на другую;
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$ – производная частного;
- $f([g(x)]) = f'[g(x)] \cdot g'(x)$ – производная сложной функции равна произведению производной внутренней функции на производную внешней.

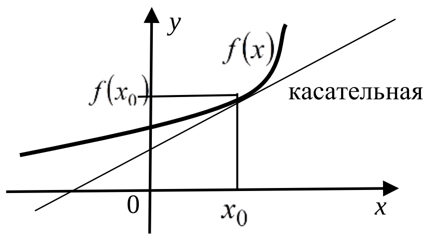
Физический смысл производной

Пусть $s(t)$ – зависимость пути от времени, тогда $v(t) = s'(t)$ (скорость есть производная пути по времени) и $a(t) = v'(t) = s''(t)$ (ускорение есть производная скорости по времени).

Уравнение касательной. Геометрический смысл производной

Пусть в системе координат изображен график некоторой функции $y = f(x)$. Касательная к нему в точке x_0 есть прямая, задаваемая уравнением:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$



Геометрический смысл производной заключается в том, что значение производной функции в точке равно тангенсу угла наклона касательной к графику функции в этой точке.

Первообразная функции и интеграл

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$. Множество всех первообразных $F(x) + C$ функции для $f(x)$, где C – произвольная константа, называется *интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx = f'(x) + C$.

Три правила нахождения первообразных

- Если F есть первообразная для f, а G – первообразная для g, то $F + G$ есть первообразная для $f + g$.
- Если F есть первообразная для f, а k – постоянная, то функция kF – первообразная для kf.
- Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, а k и b – постоянные, причем $k \neq 0$, то $\frac{1}{k}F(kx + b)$ есть первообразная для $f(kx + b)$.

Таблица первообразных

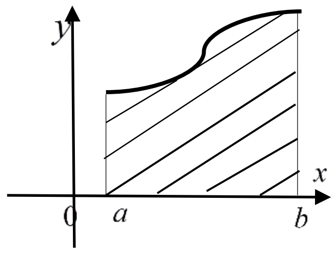
$f(x)$	$F(x)$	*Ограничения*
k	$kx+C$	$x\in R$
x^{α}	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$	$\alpha\in N, x\in R$ или $-\alpha\in N,\ \alpha\neq 1, x\neq 0,$ или $\alpha\notin Z, x>0$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+C$	$x\in R$
e^{x}	$e^{x}+C$	$x\in R$
a^{x}	$\frac{a^{x}}{\ln a}+C$	$x\in R$
$\cos x$	$\sin x+C$	$x\in R$
$\sin x$	$-\cos x+C$	$x\in R$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x+C$	$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right), n\in Z$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x+C$	$(\pi n;\ \pi+\pi n), n\in Z$

Определенный интеграл

Если $F(x)$ – произвольная непрерывная первообразная функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, то *определенным интегралом* $\int_a^b f(x)dx$ от функции $f(x)$ вдоль отрезка $[a;b]$ называется число, равное разности $F(b)-F(a)$.

Площадь криволинейной трапеции

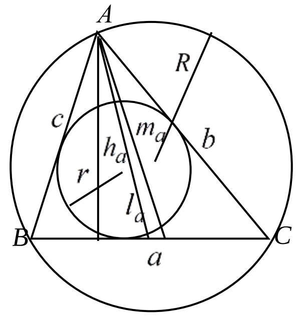
Фигура, ограниченная графиком непрерывной и неотрицательной на отрезке $[a;b]$ функции $f(x)$ и прямыми $y=0$, $x=a$, $x=b$ называется криволинейной трапецией. Площадь криволинейной трапеции можно вычислить по формуле $S=\int_a^b f(x)dx$.



Основные метрические соотношения планиметрии

Треугольник

Введем для треугольника ABC обозначения: $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$, m_a, l_a, h_a – медиана, биссектриса и высота соответственно, проведенные к стороне a, P – периметр, p – полупериметр, S – площадь треугольника, R и r – радиусы соответственно описанной и вписанной окружностей.



Для треугольника ABC справедливы соотношения для нахождения его площади:

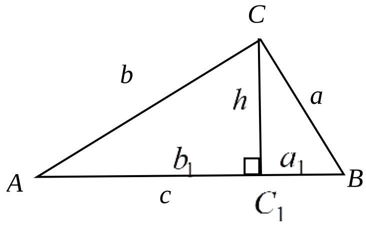
- $S = \frac{1}{2}ah_a$,
- $S = \frac{1}{2}ab\sin C$,
- $S = pr$,
- $S = \frac{abc}{4R}$,
- $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,
- $S = \frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}$,
- $S = 2R^2\sin A\sin B\sin C$.

В *произвольном треугольнике* имеют место соотношения:

- $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ – теорема синусов;
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ – теорема косинусов;
- $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ – длина медианы;
- $h_a = \frac{2S}{a}$ – длина высоты;
- $l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$ – длина биссектрисы.

В *правильном треугольнике* со стороной a можно использовать формулы:

- $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^3$,
- $R = \frac{\sqrt{3}}{3}a$,
- $r = \frac{\sqrt{3}}{6}$.



В *прямоугольном треугольнике* с катетами a, b, гипотенузой c и высотой h, проведенной к гипотенузе и делящей ее на отрезки a_1 и b_1, справедливы соотношения:

- $a^2 = a_1c$,
- $b^2 = b_1c$,
- $h^2 = a_1b_1$,
- $hc = ab$.

Теорема Пифагора. В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов: $c^2 = a^2 + b^2$.

Правильные многоугольники

Для *правильного n-угольника* со стороной a_n, радиусом описанной окружности R, радиусом вписанной окружности r, периметром P и площадью S справедливы формулы:

- $a_n = 2R\sin\frac{180°}{n}$,
- $a_n = 2r\,\mathrm{tg}\,\frac{180°}{n}$,
- $S = \frac{1}{2}nra_n = \frac{1}{2}Pr$.

Четырехугольники

Отметим некоторые факты, касающиеся четырехугольников:

- сумма противоположных углов вписанного в окружность четырехугольника равна 180°;
- суммы противоположных сторон описанного около окружности четырехугольника равны;

• сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин его сторон.

Площади четырехугольников могут быть найдены по формулам:

Фигура	***Площадь***	***Обозначения***
Квадрат	$S = a^2$	a – сторона
Прямоуголь-ник	$S = ab$	a, b – стороны
Параллело-грамм	$S = ab\sin\alpha = ah_a$	α – угол между сторонами a и b, h_a – высота к стороне a
Ромб	$S = a^2\sin\alpha = \frac{1}{2}d_1d_2$	a – сторона, α – острый угол между сторонами, d_1, d_2 – диагонали
Трапеция	$S = \frac{1}{2}(a+b)h$	a, b – основания, h – высота
Выпуклый четырех-угольник	$S = \dfrac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha$	α – угол между диагоналями d_1, d_2

Окружность

- Длина окружности радиуса R: $C = 2\pi R$.
- Площадь круга радиуса R: $S = \pi R^2$.
- Длина дуги в α градусов или t радиан: $l = \frac{\pi R\alpha}{180°} = tR$.
- Площадь сектора с дугой в α градусов или t радиан:

$$S = \frac{\pi R^2\alpha}{360°} = \frac{1}{2}tR^2.$$

• Радиус вписанного круга в треугольник со сторонами a, b, c и полупериметром p:

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}, r = (p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2} = (p-b)\operatorname{tg}\frac{B}{2} = (p-c)\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

• Радиус описанного круга около треугольника со сторонами a, b, c и площадью S: $R = \frac{abc}{4S}$.

Объемы и поверхности тел

Обозначения: h – высота; P – периметр или окружность основания; S – площадь основания; $S_\perp$ – площадь перпендикулярного сечения; $P_\perp$– периметр перпендикулярного сечения; A – апофема правильной пирамиды и правильной усеченной пирамиды; l – образующая конуса или цилиндра (апофема пирамиды); S_1, S_2 – площади оснований усеченных пирамиды и конуса, P_1, P_2 – периметры оснований усеченных пирамиды и конуса; R_1, R_2 – радиусы оснований усеченного конуса; R – радиус шара или основания конуса.

Тело	***Объем***	***Площадь боковой поверхности***	***Площадь полной поверхности***
Прямая призма	Sh	Ph	$Ph + 2S$
Наклонная призма	$S_{\perp}h$	$P_{\perp}l$	$P_{\perp}l + 2S$
Правильная пирамида	$\frac{1}{3}Sh$	$\frac{1}{2}PA$	$\frac{1}{2}PA + S$
Пирамида	$\frac{1}{3}Sh$	есть сумма площадей боковых граней	есть сумма площадей боковых граней и площади основания
Усеченная пирамида	$\frac{1}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2\right)h$	$A(P_1 + P_2)$	$A(P_1 + P_2) +$ $+ S_1 + S_2$
Цилиндр	$Sh = \pi R^2 h$	$2\pi Rh = 2\pi Rl$	$2\pi Rh + 2\pi R^2$
Конус	$\frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\pi R^2 h$	$\frac{1}{2}Pl = \pi Rl$	$\pi R(l + R)$
Усеченный конус	$\frac{1}{3}\pi h(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2)$	$\pi(R_1 + R_2)l$	$\pi(R_1 + R_2)l +$ $+ S_1 + S_2$
Шар	$\frac{4}{3}\pi R^3$		$4\pi R^2$
Шаровой сегмент	$\pi h^2(R - \frac{1}{3}h)$		$2\pi Rh$
Шаровой слой	$\frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi h(R_1^2 +$ $R_2^2)$		$2\pi Rh$
Шаровой сектор	$\frac{2}{3}\pi R^2 h,$ h – высота сегмента		$\pi R\left(2h +\right.$ $\left.+ \sqrt{2Rh - h^2}\right)$

Метод координат на плоскости

В прямоугольной декартовой системе координат Oxy:

- расстояние между точками $A_1(x_1;\ y_1)$ и $A_2(x_2;\ y_2)$ находят по формуле: $d = \sqrt{(x_1 -\ x_2)^2 + (y_1 -\ y_2)^2}$;
- $x = \frac{x_1+\alpha x_2}{1+\alpha}$, $y = \frac{y_1+\alpha y_2}{1+\alpha}$ – координаты точки $A\ (x; y)$, делящей отрезок A_1A_2 в отношении $A_1A: AA_2 = \alpha, \alpha > 0$;
- $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ – длина вектора $\vec{a}\ (a_x;\ a_y)$;
- $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ – уравнение окружности радиуса R с центром $M_0(x_0;\ y_0)$;
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \alpha = a_x b_x + a_y b_y$ – скалярное произведение векторов $\vec{a}\ (a_x;\ a_y)$, $\vec{b}\ (b_x;\ b_y)$, угол между которыми равен α.

Комбинаторика и вероятность

Основные комбинаторные схемы и формулы

Задачи *безформульной комбинаторики* базируются на использовании двух правил:

- *правило комбинаторного умножения*: если первый элемент можно выбрать n способами, после чего второй элемент – k способами, то выбрать первый **и** второй элементы можно $n \cdot k$ способами;
- *правило комбинаторного сложения*: если первый элемент можно выбрать n способами, после чего второй элемент – k способами, то выбрать первый **или** второй элементы можно $n + k$ способами.

Для решения задач по формулам необходимо определить, по какой комбинаторной схеме она решается. Для этого требуется ответить на ряд вопросов.

- *Важно ли в каком порядке выбираются элементы*?

  Если порядок имеет значение, то выбираются схемы перестановок или размещений; если не важен – сочетаний.

- *Могут ли при выборе элементы повторяться (выбирать один и тот же элемент несколько раз; брать одинаковые элементы и т. п.)?*

  Если элементы все разные, то выбирается схема «без повторений», а если есть возможность повторять элементы – «с повторениями».

- *Все ли имеющиеся элементы используются при выборе?*

  Если используются все элементы, то выбирается схема перестановок, если только часть имеющихся элементов – схема размещений.

Для удобства использования формул они представлены в таблице.

Напомним, что $n!$ обозначает произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно и называется *факториалом* числа n (по определению $0! = 1$).

<table>
<tr><th></th><th>Порядок имеет значение</th><th>Порядок не имеет значения</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Повторений элементов нет</td><td>Схема: все имеющиеся n элементов выложены в один ряд. Сколько существует способов поменять их местами?

Перестановки n элементов
$P_n = n!$</td><td rowspan="2">Схема: имеется n элементов, из них выбирают k элементов. Сколько существует способов сделать это?

Сочетания n элементов группами по k элементов
$C_n^k = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$</td></tr>
<tr><td>Схема: имеется n элементов, из них выбирают k элементов и выкладывают в один ряд. Сколько существует способов сделать это?

Размещения n элементов группами по k элементов
$A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Повторения элементов есть</td><td>Схема: все имеющиеся n элементов, среди которых k_1 элемент 1-го типа, k_2 элемента 2-го типа, ..., k_p элементов типа p, выложены в один ряд. Сколько существует способов поменять их местами?

Перестановки n элементов с повторениями
$\tilde{P}_n = \dfrac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_p!}$</td><td rowspan="2">Схема: имеется n типов элементов, выбирают k элементов (быть может, одного типа). Сколько существует способов сделать это?

Сочетания n элементов группами по k элементов с повторениями
$\tilde{C}_n^k = \dfrac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}$</td></tr>
<tr><td>Схема: имеется n типов элементов, выбирают k элементов (быть может, одного типа) и выкладывают в один ряд. Сколько существует способов сделать это?

Размещения n элементов группами по k элементов с повторениями
$\tilde{A}_n^k = n^k$</td></tr>
</table>

Вероятность случайного события

Вероятностью случайного события A называют число, равное отношению количества благоприятных исходов (k) эксперимента к общему количеству возможных его исходов (n):

$$P(A) = \frac{k}{n}.$$

Суммой двух событий A и B называют событие, которое имеет место, если происходит хотя бы одно из событий A или B.

Произведением двух событий A и B называют событие, которое имеет место, если происходят оба события и A, и B.

Два события называются *совместными*, если они могут произойти одновременно; в противном случае они называются *несовместными*.

Два события называются *независимыми*, если факт свершения одного из них никак не влияет на возможность появления другого; в противном случае события называются *зависимыми*.

Справедливы следующие формулы:

- для независимых событий: $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$;
- для зависимых событий: $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B)$, где $P_A(B)$ – вероятность события B, при условии, что событие A уже произошло;
- для несовместных событий: $P(A + B) = P(A) + P(B)$;
- для совместных событий: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$.