Вариант 1802201401, 03, 05, 07
Часть 2
Модуль «Алгебра»

21. Сократите дробь $\frac{3^2 \cdot 25^4}{5^{10} \cdot 2^2}$.

Решение:

$$\frac{3^2 \cdot 25^4}{5^{10} \cdot 2^2} = \frac{3^2 \cdot (5^2)^4}{5^{10} \cdot 2^2} = \frac{9 \cdot 5^8}{5^{10} \cdot 4} = \frac{9}{5^2 \cdot 4} = \frac{9}{100} = 0{,}09$$

Ответ: 0,09

22. Скорость велосипедиста на 51 км/ч меньше скорости автомобилиста. Расстояние от города до поселка велосипедист проезжает за 8 часов, а автомобилист за 2 часа. Какова скорость автомобилиста?

Решение:

Пусть x км/ч – скорость автомобилиста, тогда $(x - 51)$ км/ч – скорость велосипедиста. Так как велосипедист за 8 часов проехал то же расстояние, что и автомобилист за 2 часа, то составляем уравнение:

	v	t	S
Автомобилист	x км/ч	2 ч	$2x$ км
Велосипедист	$(x - 51)$ км/ч	8 ч	$8(x - 51)$ км

$$8(x - 51) = 2x$$
$$8x - 408 = 2x$$
$$6x = 408$$
$$x = 68$$

68 км/ч – скорость автомобилиста.

Ответ: 68.

23. Постройте график функции $y = -x^2 + 6x - \frac{10x}{|x|}$ и определите, при каких значениях параметра a прямая $y = a$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение:

Рассмотрим функцию $y = -x^2 + 6x - \frac{10x}{|x|}$. Ее область определения – все числа, кроме 0 ($D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$). Раскроем модуль с учетом знака x:

$$y = \begin{cases} -x^2 + 6x - \dfrac{10x}{-x}, & \text{если } x < 0, \\ -x^2 + 6x - \dfrac{10x}{x}, & \text{если } x > 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

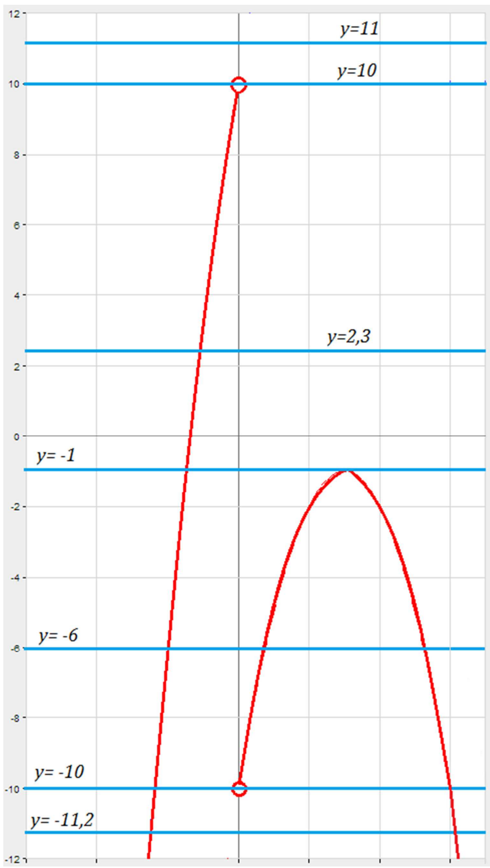
$$y = \begin{cases} -x^2 + 6x + 10, & \text{если } x < 0, \\ -x^2 + 6x - 10, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Построим график получившейся кусочно-заданной функции с учетом выколотой точки $x = 0$ (выделена красным цветом).

Прямая $y = a$ параллельна оси Oy. Будем брать различные значения a и двигать прямую снизу вверх. При $a \leq -10$ прямая и график имеют ровно две общие точки, при $-10 < a < -1$ – три точки пересечения, при $a = -1$ – две точки пересечения, при $-1 < a < 10$ – ровно одна точка пересечения и при $a > 10$ – точек пересечения нет.

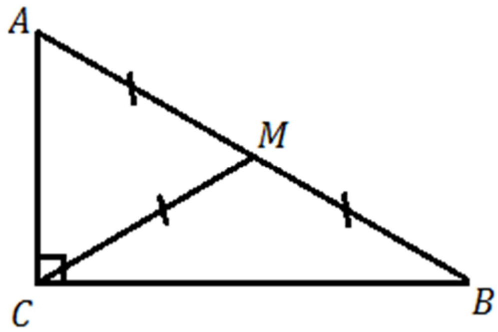
Таким образом, график данной функции и прямая имеют ровно две общие точки при $a \leq -10$ и при $a = -1$.

Ответ: $(-\infty; -10] \cup \{-1\}$



Модуль «Геометрия»

24. Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна 10 и делит прямой угол в отношении 1:2. Найдите длину меньшего из катетов.



Решение:

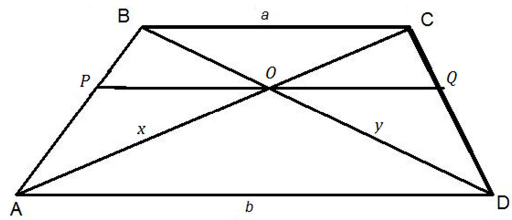
Т.к. треугольник прямоугольный, то его медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине. Поэтому, если $CM = AM = MB = 10$, то $AB = 20$.

Т.к. медиана делит прямой угол в отношении 1:2, то больший из них (на рисунке угол AMC) равен 60°, а меньший 30° (на рисунке угол MCB). Т.к. угол AMC равен 60° и $CM = AM$, то треугольник AMC – равносторонний. Тогда $AC = 10$.

Угол A равен 60°, угол B равен 30°. Против меньшего угла лежит меньшая сторона, поэтому катет AC меньший.

Ответ: 10

25. Дана произвольная трапеция $ABCD$, в которой $AD||BC$. Пусть точка O есть пересечение диагоналей трапеции. Через O параллельно основаниям трапеции проведена прямая, пересекающая стороны AB и CD в точках P и Q соответственно. Доказать, что $PO=OQ$.



Доказательство:

1) Рассмотрим треугольники AOD и BOC:
   1. $\angle AOD = \angle BOC$ (т.к. они вертикальные)
   2. $\angle$BCO=$\angle$OAD (накрест лежащие при $AD||BC$ и секущей CA)

   Из этого следует, что треугольники AOD и BOC подобны (по двум углам).
2) Из подобия треугольников следует равенство отношений сходственных сторон.

   $\frac{OC}{OA} = \frac{OB}{OD} = k$ (1)

   Обозначим $OA = x$ и $OD = y$. Тогда $OC = kx$ и $OB = ky$.
3) $AC = AO + OC = x + kx = x(k+1)$, (2)

   $BD = BO + OD = y + ky = y(k+1)$ (3)
4) Рассмотрим треугольники PBO и ABD
   1. $\angle B$ - общий
   2. $\angle BPO = \angle BAD$ (односторонние при параллельных прямых PO||AD и секущей AB)

   Треугольники PBO и ABD подобны (по двум углам)
5) Из подобия следует равенство отношений сходственных сторон

$$\frac{PO}{AD} = \frac{OB}{BD}$$

6) $\frac{OB}{BD} = \frac{ky}{y(k+1)} = \frac{k}{k+1} \Rightarrow \frac{PO}{AD} = \frac{k}{k+1}$
7) Рассмотрим треугольники QCO и ACD
   1. $\angle C$ - общий
   2. $\angle CQO = \angle CDA$ (односторонние при параллельных прямых PO||AD и секущей CD)

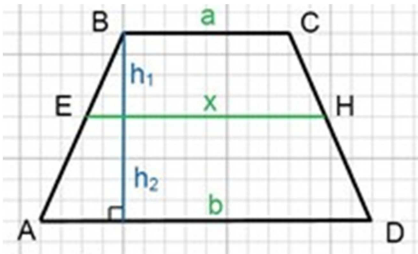
   Треугольники QCO и ACD подобны (по двум углам)
8) Из подобия следует равенство отношений сходственных сторон

$$\frac{OQ}{AD} = \frac{OC}{AC}$$

9) $\frac{OC}{AC} = \frac{kx}{x(k+1)} = \frac{k}{k+1} \Rightarrow \frac{OQ}{AD} = \frac{k}{k+1}$
10) $\left.\begin{array}{l} \frac{PO}{AD} = \frac{k}{k+1} \\ \frac{OQ}{AD} = \frac{k}{k+1} \end{array}\right| \Rightarrow \frac{PO}{AD} = \frac{OQ}{AD} \Rightarrow PO = OQ$

    Что и требовалось доказать.

26. Основания трапеции равны a и b. Определить длину отрезка, параллельного основаниям и делящего трапецию на равновеликие части.



Решение:

Обозначим неизвестный отрезок за $EH = x$, который разбивает трапецию на две равновеликие части (равные по площади).

Высота трапеции $ABCD$ равна $h_1 + h_2$. Тогда ее площадь равна:

$$S_{ABCD} = \frac{a+b}{2}(h_1 + h_2)$$

Площади, получившихся при разбиении, трапеций:

$$S_{EBCH} = \frac{a+x}{2}h_1$$

$$S_{AEHD} = \frac{x+b}{2}h_2$$

По условию эти площади равны, т.е.

$$S_{EBCH} = \frac{a+x}{2}h_1 = S_{AEHD} = \frac{x+b}{2}h_2$$
$$\frac{a+x}{2}h_1 = \frac{x+b}{2}h_2$$
$$(a+x)h_1 = (x+b)h_2$$

В сумме площадь трапеций $EBCH$ и $AEHD$ дает площадь трапеции $ABCD$, т.е.

$$S_{ABCD} = S_{EBCH} + S_{AEHD}$$
$$\frac{a+b}{2}(h_1 + h_2) = \frac{a+x}{2}h_1 + \frac{x+b}{2}h_2 \quad | \cdot 2$$
$$(a+b)(h_1 + h_2) = (a+x)h_1 + (x+b)h_2$$

Упростим два получившихся выражения:

$$(a+x)h_1 = (x+b)h_2 \quad (1)$$
$$(a+b)(h_1 + h_2) = (a+x)h_1 + (x+b)h_2 \quad (2)$$

(1) $(a+x)h_1 = (x+b)h_2 \;\Rightarrow\; h_1 = \frac{x+b}{a+x}\, h_2$

(2) $(a+b)(h_1 + h_2) = (a+x)h_1 + (x+b)h_2 \;\Rightarrow\; (a+b)h_1 + (a+b)h_2 = (a+x)h_1 + (x+b)h_2 \;\Rightarrow$
$(a+b)h_1 - (a+x)h_1 = (x+b)h_2 - (a+b)h_2 \;\Rightarrow\; (a+b-a-x)h_1 = (x+b-a-b)h_2 \;\Rightarrow$
$(b-x)h_1 = (x-a)h_2 \;\Rightarrow\; h_1 = \frac{x-a}{b-x}\, h_2$

Тогда с одной стороны $h_1 = \frac{x+b}{a+x}\, h_2$, а с другой стороны $h_1 = \frac{x-a}{b-x} h_2$. Получаем:

$$\frac{x+b}{a+x}\, h_2 = \frac{x-a}{b-x}\, h_2 \quad |: h_2$$
$$\frac{x+b}{a+x} = \frac{x-a}{b-x}$$
$$(x+b)(b-x) = (x-a)(a+x)$$
$$b^2 - x^2 = x^2 - a^2$$
$$2x^2 = a^2 + b^2$$
$$x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Ответ: $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

Вариант 1802201402, 04, 06, 08
Часть 2
Модуль «Алгебра»

21. Сократите дробь $\frac{6^n \cdot 2^2}{2^n \cdot 3^n}$.

Решение:

$$\frac{6^n \cdot 2^2}{2^n \cdot 3^n} = \frac{6^n \cdot 2^2}{(2 \cdot 3)^n} = \frac{6^n \cdot 4}{6^n} = 4$$

Ответ: 4.

22. Пассажир, едущий из A в B, одну половину затраченного на путь времени ехал на автобусе, а вторую – на автомашине. Если бы он ехал от A до B только на автобусе, то это заняло бы в полтора раза больше времени. Во сколько раз быстрее проходить путь от A до B машина, чем автобус?

Решение:

Обозначим v_1 – скорость автобуса, v_1 – скорость автомашины, t – время, затраченное на путь.

Рассмотрим вариант, когда пассажир едет на двух видах транспорта:

	v	t	S
автобус	v_1	$0{,}5t$	$0{,}5v_1t$
автомашина	v_1	$0{,}5t$	$0{,}5v_2t$

Рассмотрим вариант, когда пассажир едет только на автобусе

	v	t	S
автобус	v_1	$1{,}5t$ (т.к. по условию, если он едет только на автобусе, то ему потребуется в 1,5 раза больше времени)	$1{,}5v_1t$

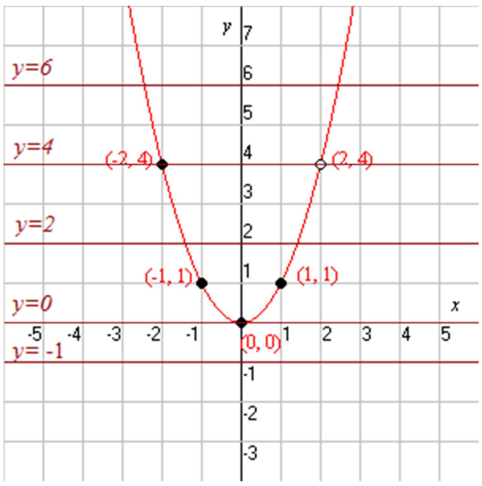
Т.к. в обоих вариантах пассажир преодолевает одно и то же расстояние, получаем:

$$0{,}5v_1t + 0{,}5v_2t = 1{,}5v_1t$$
$$0{,}5v_2t = 1{,}5v_1t - 0{,}5v_1t$$
$$0{,}5v_2t = v_1t \quad |:t$$
$$v_1 = 0{,}5v_2$$

Получаем, что скорость автобуса в 2 раза меньше скорости автомашины. Соответственно, она проходит путь от A до B в 2 раза быстрее.

Ответ: в 2 раза.

23. Постройте график функции $y = \frac{x^3 - 2x^2}{x-2}$ и определите, при каких значениях параметра a прямая $y = a$ имеет с графиком ровно одну общую точку.



Решение:

Рассмотрим функцию $y = \frac{x^3 - 2x^2}{x-2}$. Ее область определения – все числа, кроме 2 ($D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$).

Рассмотрим дробь:

$$\frac{x^3 - 2x^2}{x-2} = \frac{x^2(x-2)}{x-2} = x^2$$

При $x \neq 2$ функция принимает вид $y = x^2$ – график парабола с ветвями, направленными вверх.

Строим параболу $y = x^2$ с выколотой точкой $x = 2$.

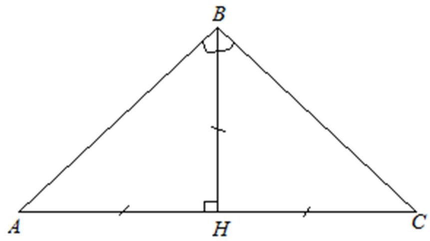
Прямая $y = a$ параллельна оси Oy. Будем брать различные значения a и двигать прямую снизу вверх.

При $a < 0$ прямая и парабола не имеют общих точек, при $a = 0$ – прямая и парабола пересекаются в ее вершине, при $0 < a < 2$ – прямая и парабола пересекаются в двух точках, при $a = 4$ – одна общая точка, т.к. точка (2;4) выколота. При дальнейшем движении прямой $y = a$ вверх она будет пересекать параболу в двух точках.

Ответ: 0; 4

Модуль «Геометрия»

24. Биссектриса угла при вершине равнобедренного треугольника в 2 раза меньше основания этого треугольника. Найдите высоту, опущенную на боковую сторону, если длина боковой стороны равна 3.

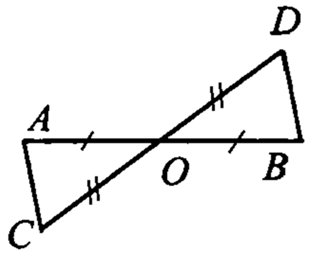


Решение:

Т.к. треугольник равнобедренный, то биссектриса, проведенная к основанию, является медианой и высотой. Она в два раза меньше этого основания. Получаем два равнобедренных прямоугольных треугольника. Следовательно, углы ABH и CBH равны по 45°, а значит угол B прямой. Тогда треугольник ABC прямоугольный, а значит, высота, проведенная к боковой стороне, совпадает с катетом и равна 3.

Ответ: 3

25. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, являющейся их серединой. Докажите параллельность прямых AC и BD.



Доказательство:

Рассмотрим треугольники AOC и BOD:

1) $AO = OB$ (т.к. O – середина AB)
2) $CO = OD$ (т.к. O – середина CD)
3) $\angle AOB = \angle DOB$ (т.к. они вертикальные)

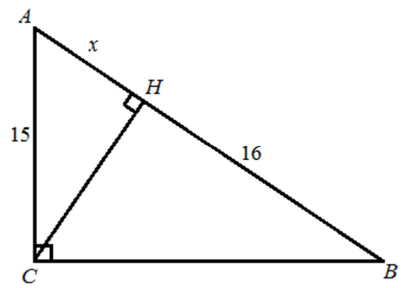
Следовательно, треугольники равны по двум сторонам и углу между ними.

Из равенства треугольников следует равенство углов $\angle OAC = \angle OBD$ – накрест лежащие при прямых AC и BD и секущей AB. Следовательно, по первому признаку параллельных прямых $AC||BD$. Что и требовалось доказать.

26. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15, а проекция другого катета на гипотенузу равна 16. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

Решение:

Чтобы найти радиус вписанной окружности, найдем площадь треугольника двумя способами:



$$S = \frac{1}{2}Pr \qquad S = \frac{1}{2}AC \cdot CB$$

Найдем катет CB:

1) По свойству пропорциональных отрезков в прямоугольном треугольнике катет равен среднему геометрическому между гипотенузой и проекцией катета на нее:

$$AC = \sqrt{AB \cdot AH}$$
$$15 = \sqrt{(x+16)x}$$
$$225 = x^2 + 16x$$
$$x^2 + 16x - 225 = 0$$

Решим квадратное уравнение:

$$D = 256 + 900 = 1156 = 34^2$$
$$x_1 = \frac{-16+34}{2} = 9, \quad x_2 < 0$$

$AH = x = 9$

2) $AB = AH + HB = 9 + 16 = 25$
3) По теореме Пифагора: $CB = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{625 - 225} = 20$

Найдем площадь треугольника:

$$S = \frac{1}{2}AC \cdot CB = \frac{1}{2}15 \cdot 20 = 150$$
$$S = \frac{1}{2}Pr = \frac{1}{2}(15 + 20 + 25)r = 150$$
$$\frac{1}{2} \cdot 60r = 150$$
$$30r = 150$$
$$r = 5$$

Ответ: 5.